

AVALIAÇÃO DE FATOR DE ATRITO PELO MÉTODO DE NEWTON PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE COLEBROOK–WHITE

Evaluation of friction factor by newton's method for Colebrook–White equation solution

Tiago dos Santos Gonçalves^{1,2}; Carolina Elisa Demaman Oro¹;
Rogério Marcos Dallago¹; Marcelo Luis Mignoni^{1,*}

¹ Departamento de Engenharia de Alimentos e Engenharia Química - Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI), Erechim, RS.

² Departamento de Engenharia de Alimentos, IFC – Instituto Federal Catarinense, Concórdia, SC.

*E-mail: mignoni@uricer.edu.br

Data do recebimento: 26/02/2021 - Data do aceite: 16/06/2021

RESUMO: Com o intuito de minimizar erros de leitura de gráficos, como ocorre no caso do uso do Diagrama de Moody, foi elaborada uma ferramenta computacional utilizando equações que relacionam a temperatura com as propriedades da água, a fim de avaliar o fator de atrito de um escoamento de água em uma tubulação com determinada rugosidade. A metodologia de fator de atrito com a utilização do método de Newton para a solução da Equação de Colebrook–White foi avaliada e os resultados obtidos para diferentes materiais foram apresentados. Foi realizada uma comparação entre os valores de fator de atrito e perda de carga para uma tubulação de aço soldado novo e uma de aço soldado usado e limpo. Todos os cálculos foram realizados em função da temperatura, vazão, diâmetro da tubulação e rugosidade da mesma, com a utilização de equações preditivas de propriedades da água. O uso da planilha computacional facilita a comparação de dados e a entrada de novas variáveis, mostrando novas possibilidades de ensino e avaliação na área das Engenharias.

Palavras-chave: Diagrama de Moody. Métodos de Newton. Mecânica dos Fluidos.

ABSTRACT: In order to minimize graph reading errors, as in the case of using the Moody Diagram, a computational tool was developed using equations that relate the temperature to the water properties to evaluate the friction factor of water flow in a pipe with a certain roughness. The friction factor methodology using Newton's method to solve the Colebrook-White Equation was evaluated and the results obtained for different materials were presented. A comparison between the values of friction factor and pressure drop for a new welded steel pipe and a used and clean welded steel pipe was carried out. All calculations were performed regarding temperature, flow, pipe diameter and roughness, using predictive equations for water properties. The use of a computational spreadsheet facilitates the comparison of data and the entry of new variables, and shows new teaching and assessment possibilities in the Engineering field.

Keywords: Moody diagram. Newton's methods. Fluid Mechanics.

Introdução

O fator de atrito de Darcy (f) é uma quantidade adimensional usada na Equação de Darcy-Weisbach (Equação 1), para a descrição de perdas por atrito em tubulação ou duto, bem como para escoamento em canal aberto. Também é chamado de fator de atrito de Darcy-Weisbach, coeficiente de resistência ou simplesmente fator de atrito. Determinou-se que o fator de atrito depende do número de Reynolds para o escoamento e do grau de rugosidade da superfície interna do tubo (especialmente para regime turbulento). O fator de atrito do regime laminar é independente da rugosidade da superfície interna do tubo (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

$$h = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}, \text{ em m} \quad (1)$$

Em que: L é o comprimento da tubulação (físico + equivalente em função das singularidades) (m), D é o diâmetro da tubulação (m), v é a velocidade média de escoamento (m/s), g é a aceleração da gravidade (m/s²), e f é o fator de atrito que pode ser calculado por meio das Equações de Haaland (2), Swamee

e Jain (3), e Colebrook-White (4), que são mais adequadas para processos de simulação do que a determinação de forma gráfica pelo Diagrama de Moody (Figura 1) (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010).

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left(\frac{6,9}{Re} + \left(\frac{k}{3,7D} \right)^{1,1} \right) \quad (2)$$

$$f = \left\{ \left(\frac{64}{Re} \right)^8 + 9,5 \left[\ln \left(\frac{k}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) - \left(\frac{2,500}{Re} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0,125} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,7D} + \left(\frac{2,51}{Re \sqrt{f}} \right) \right) \quad (4)$$

Em que: k é a rugosidade absoluta da tubulação (m) e Re é o Número de Reynolds (Equação 5).

As Equações 2 e 3 são explícitas no fator de atrito, ou seja, o valor de f é uma função direta das variáveis, Re e k , lembrando que Re também depende de v . A Equação 4 é implícita em f , ou seja, é necessária a utilização de métodos numéricos para aquisição do valor de f , que são discutidos na metodologia de cálculo deste trabalho. As Equações 2 e 4 apresentam aplicação apenas o regime turbulento em

uma tubulação ($Re > 4.000$) e a Equação 3 apresenta utilização em qualquer faixa do número de Reynolds (Equação 5) (SANTOS et al., 2016) visto que é fundamental na área de projetos. Na indústria, é comum ocorrer perda de eficiência energética, devido ao mau dimensionamento de redes e de transferência de fluidos, resultando em custos adicionais de produção e manutenção de equipamentos. O Grupo de Pesquisa em Ensino de Física para Engenharias (GruPEFE).

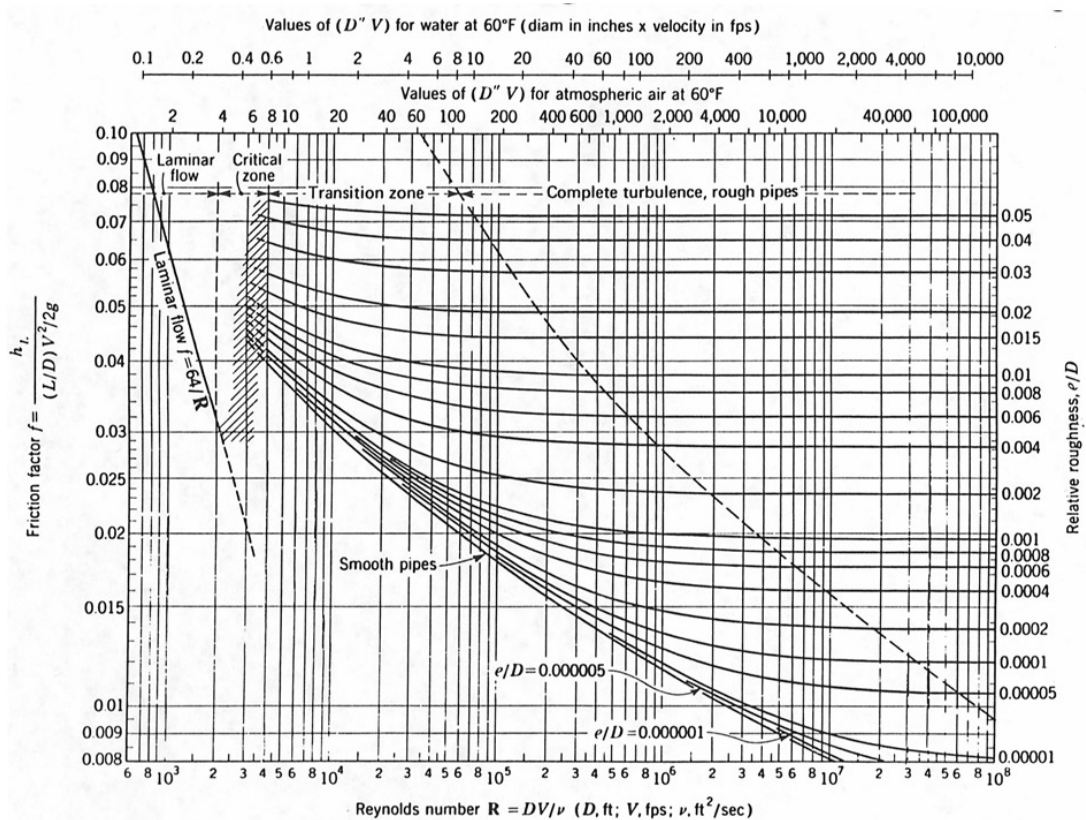
$$Re = \frac{Dv\rho}{\mu} \quad (5)$$

Em que: ρ e μ correspondem à massa específica e à viscosidade dinâmica (ou absoluta) do fluido, respectivamente. Para este trabalho

considera-se que ρ e μ da água são funções da temperatura, conforme as Figuras 2 e 3.

Antes da popularização dos processos computacionais, o fator de atrito era estimado por meio do Diagrama de Moody (Figura 1), que é a representação gráfica em escala duplamente logarítmica do fator de atrito (f) em função do Número de Reynolds e da rugosidade relativa de uma tubulação (k/D). Podem-se distinguir duas situações diferentes o caso em que o escoamento seja laminar e o caso em que o escoamento seja turbulento. No caso de escoamento laminar, se usa uma das expressões da Equação de Poiseuille; no caso de escoamento turbulento, usa-se a Equação de Colebrook-White (4) (ANDRADE; CARVALHO, 2001).

Figura 1 - Diagrama de Moody (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010)



Para a finalidade de simulação de processos, o Diagrama de Moody apresenta problemas de precisão de leitura que podem acarretar em erros grandes nos custos de operação (bomba maior do que o necessário) ou operações com restrição (bomba menor do que o necessário), pois a perda de carga apresenta relação linear com o fator de atrito. Portanto, erros de leitura podem prejudicar o resultado e a análise de processos. O objetivo deste trabalho é a introdução de variáveis de processo, tais como temperatura (para propriedades de transporte do fluido tais como densidade e viscosidade dinâmica), vazão de fluido e diâmetro de tubulação, assim como a rugosidade absoluta do tubo, que é um dado de fabricação, para estimar o fator de atrito do fluido no escoamento. Assim, para minimizar este problema de leitura de gráfico, o escopo deste trabalho está na implementação da Equação 4 em processamento de dados e correlações.

Como ferramenta de ensino e aprendizagem, aborda-se a utilização de equações que relacionam as propriedades da água com a temperatura. Para tanto, são utilizados métodos numéricos para avaliar o fator de atrito de um escoamento de água em uma tubulação com determinada rugosidade. Assim, a utilização de planilha eletrônica como ferramenta de ensino-aprendizagem, remete a métodos numéricos, ampliando assim o horizonte de ensino e complementando esta atividade de importância para a engenharia que é a determinação de perda de carga em escoamento de fluidos. Além disso, o uso de planilhas incentiva os alunos a usar a criatividade e aplicar a ferramenta em estudos utilizando modelagem matemática (ARAÚJO et al., 2005; CABEZA et al., 2016; FIGUEIRA; VEIT, 2004; SIMÓN-HERRERO et al., 2019).

Neste trabalho, é apresentada uma metodologia de avaliação de fator de atrito com a utilização do método de Newton para a solução da Equação implícita de Colebrook–White.

Os cálculos foram realizados em função da temperatura, da vazão, do diâmetro e da rugosidade da tubulação, com a utilização de equações preditivas de propriedades da água.

Metodologia

A Metodologia apresenta os métodos e os passos utilizados para a elaboração da planilha como ferramenta de ensino para a avaliação de fator de atrito. O método de Newton para a solução da Equação implícita de Colebrook–White é apresentada e discutida.

Método de Newton

Em análise numérica, o método de Newton (ou Método de Newton–Raphson), desenvolvido por Isaac Newton (1643–1727) e Joseph Raphson (1648–1715), tem o objetivo de estimar as raízes de uma função. Para isso, escolhe-se uma aproximação inicial para esta. Após isso, calcula-se a equação da reta tangente (por meio da derivada) da função nesse ponto e a interseção dela com o eixo das abscissas, a fim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz. Repetindo-se o processo, cria-se um método iterativo para encontrar a raiz da função. Em notação matemática, o método de Newton é dado pela seguinte sequência recursiva, conforme Equação 6.

$$x_{(i+1)} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (6)$$

O método de Newton é descrito pela Equação 6. Para a determinação de uma nova iteração do processo de análise de raiz da equação, o “chute inicial” para o cálculo do fator de atrito pertence ao intervalo entre 0,1 e 0,0001, que é a faixa usual do fator de atrito, conforme observado na Figura 1. Quando a

equação não possuir uma derivada ou ser instável, apresentando pontos de máximo e/ou mínimo, nestas regiões o melhor método para solução de raiz é a da bissecção.

Cálculo de raiz do fator de atrito em função de Reynolds e rugosidade da tubulação

A Figura 2 apresenta a massa específica da água (kg/m³) em função da temperatura, para a faixa de 0 °C até 100 °C, e a Equação 7 apresentada na Figura 2 mostra o polinômio característico desta correlação. Já a Figura 3 apresenta a viscosidade dinâmica da água (Pa.s) em função da temperatura, para a faixa de 0 °C até 100 °C, e a Equação 8, apresentada na Figura 3, mostra o polinômio característico desta correlação.

Figura 2 - Massa específica da água em função da temperatura

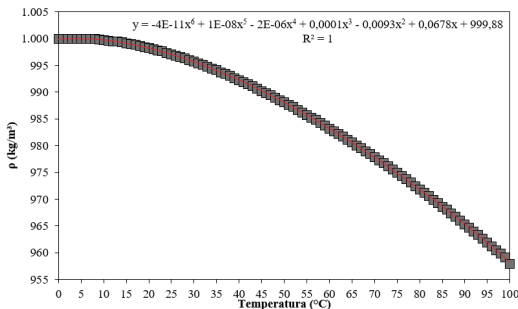
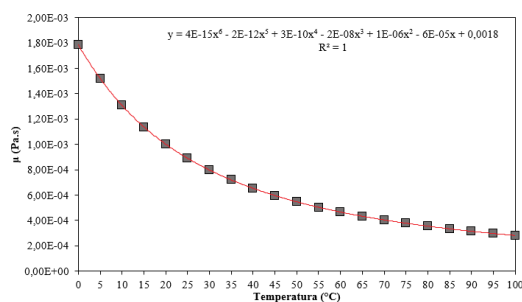


Figura 3 - Viscosidade dinâmica da água em função da temperatura



A estimativa de fator de atrito, para este caso, é calculada utilizando a Equação de Colebrook–White (Equação 9), desenvolvida em 1939. Esta equação tem sido considerada como a mais precisa lei de resistência ao escoamento, e vem sendo utilizada como padrão referencial (AZIZI; HOMAYOON; HOJJATI, 2019; FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010). Mas, apesar disto, e de todo o fundamentalismo e embasamento teórico agregado à mesma, tem uma particularidade que pode ser pouco conveniente: é implícita em relação ao fator de atrito, ou seja, a grandeza *f* está presente nos dois membros da equação, sem possibilidade de ser explicitada em relação às demais grandezas. Sua resolução requer um processo iterativo, que, no presente estudo, se dá pelo método de Newton. A equação de Colebrook-White está descrita na Equação 9 e é dependente de dois parâmetros adimensionais, a rugosidade relativa (*k/D*) e o número de Reynolds, que descreve quantitativamente o grau de turbulência de um escoamento de fluido (AZIZI, HOMAYOON; HOJJATI, 2019).

$$g(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2 \log \left(\frac{k}{3,7D} + \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right) \right) = 0 \quad (9)$$

A Equação 10 é a derivada da Equação 9 para cálculo de fator de atrito, de acordo com o método de Newton (Equação 6), sendo obtida conforme a regra de logaritmos e de polinômios.

$$g'(f) = \frac{-0,5}{f^{1,5}} + \log_e \left[\frac{\frac{-2,51}{2Re\sqrt{f}^{1,5}}}{\left(\frac{k/D}{3,7} + \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right) \right)} \right] \quad (10)$$

A Figura 4 apresenta o fluxograma para a estimativa do fator de atrito por meio do método de Newton, que é a entrada para a

perda de carga (queda de pressão) em um escoamento conforme descrito na Equação 1.

Dados de entrada

Os dados de entrada necessários para a resolução e obtenção do fator de atrito pelo método proposto no presente estudo são a resolução e obtenção do fator de atrito pelo método proposto no presente estudo são a temperatura da água (°C), a vazão e o diâmetro da tubulação, bem como o material do tubo e a rugosidade absoluta do mesmo.

Dessa forma, a Tabela I apresenta os materiais de tubo e suas respectivas rugosidades absolutas. Cada material possui um código, para ser mais fácil a entrada na planilha eletrônica computacional desenvolvida para o presente estudo, visando a simular as diversas situações a serem analisadas. A modelagem e simulação de dados têm sido uma característica chave na engenharia, por mais de um século, em todas as áreas de atuação e inovação (FEISE; SCHAEER, 2021).

Figura 4 - Fluxograma para a estimativa do fator de atrito por meio do método de Newton

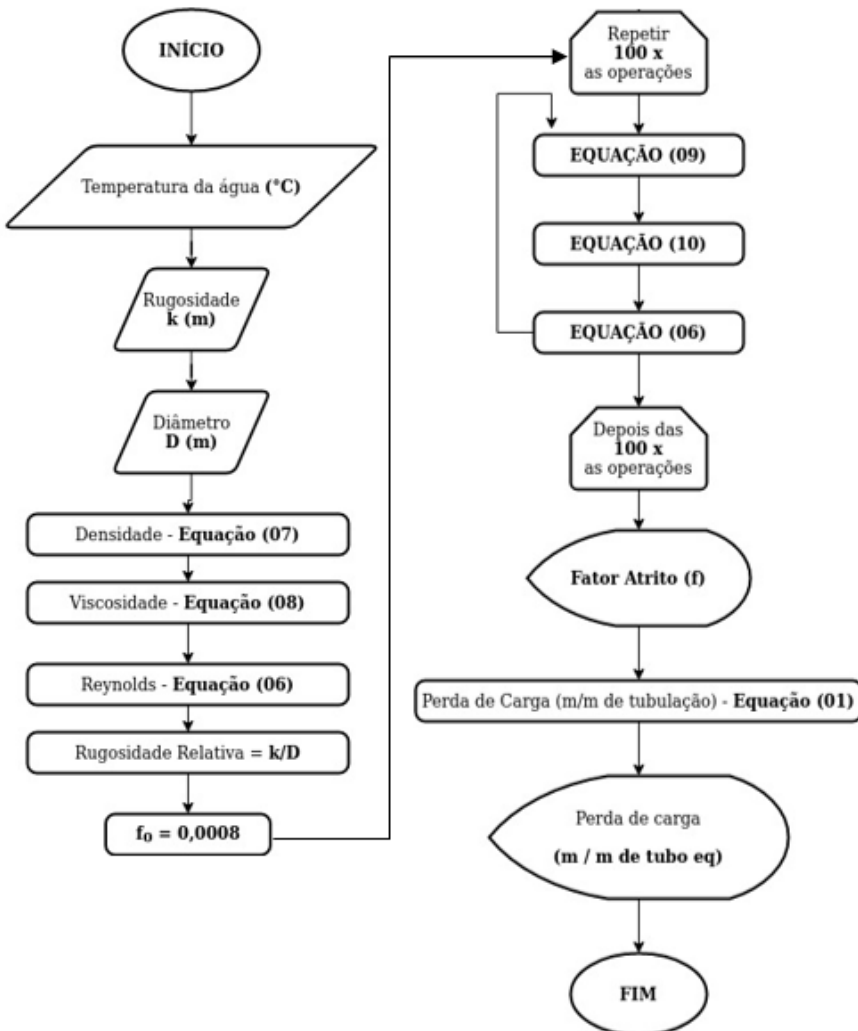


Tabela I - Material do tubo e rugosidade absoluta para obtenção do fator de atrito (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2010)

| Código | Material do tubo | Rugosidade Absoluta ϵ (mm) – Faixa |
|---------------|---|---|
| 1 | Aço comercial novo | 0,045 |
| 2 | Aço laminado novo | 0,04 a 0,1 |
| 3 | Aço soldado novo | 0,05 a 0,1 |
| 4 | Aço soldado limpo, usado | 0,15 a 0,2 |
| 5 | Aço soldado moderadamente oxidado | 0,4 |
| 6 | Aço soldado revestido de cimento centrifugado | 0,1 |
| 7 | Aço laminado revestido de asfalto | 0,05 |
| 8 | Aço rebitado novo | 1 a 3 |
| 9 | Aço rebitado em uso | 6 |
| 10 | Aço galvanizado, com costura | 0,15 |
| 11 | Aço galvanizado, sem costura | 0,06 |
| 12 | Ferro forjado | 0,05 |
| 13 | Ferro fundido novo | 0,25 a 0,5 |
| 14 | Ferro fundido com leve oxidação | 0,3 |
| 15 | Ferro fundido velho | 3 a 5 |
| 16 | Ferro fundido centrifugado | 0,05 |
| 17 | Ferro fundido em uso com cimento centrifugado | 0,1 |
| 18 | Ferro fundido com revestimento asfáltico | 0,12 |
| 19 | Ferro fundido oxidado | 1 a 1,5 |
| 20 | Cimento amianto novo | 0,025 |
| 21 | Concreto centrifugado novo | 0,16 |
| 22 | Concreto armado liso, vários anos de uso | 0,2 a 0,3 |
| 23 | Concreto com acabamento normal | 1 a 3 |
| 24 | Concreto protendido Freyssinet | 0,04 |
| 25 | Cobre, latão, aço revestido de epoxi, PVC, plásticos em geral, tubos extrudados | 0,0015 |

Resultados e Discussão

A partir das Equações apresentadas no presente estudo, uma planilha de ensino-aprendizagem foi desenvolvida e pode ser implementada em sala de aula utilizando os *softwares* como Microsoft Excel ou Libre-Office Calc. A planilha pode ser entregue pronta para os alunos, ou o professor pode encaminhar o passo a passo para a elabo-

ração, elaborando a mesma com os alunos. Dessa forma, a planilha pode ser facilmente utilizada em sala de aula. Utilizando o método de Newton para a solução da Equação de Colebrook–White foram obtidos os resultados de fator de atrito por solução numérica e perda de carga para cada um dos materiais apresentados na Tabela 1, a uma temperatura de 10 °C, diâmetro de 75 mm e vazão de 35 m³/h, e os resultados são mostrados na Tabela II.

Tabela 2 - Estimativa dos valores de fator de atrito e perda de carga a 10°C para diferentes materiais

| Código | Rugosidade Absoluta ε (mm) utilizada para cálculo | Fator de atrito (f) | Perda de carga (m/m de tubulação) (Equação 1) |
|--------|---|-------------------------|---|
| 1 | 0,045 | 0,0202 | 0,0664 |
| 2 | 0,04 | 0,0199 | 0,0655 |
| 3 | 0,05 | 0,0205 | 0,0673 |
| 4 | 0,15 | 0,0248 | 0,0816 |
| 5 | 0,40 | 0,0317 | 0,1043 |
| 6 | 0,10 | 0,0228 | 0,0752 |
| 7 | 0,05 | 0,0205 | 0,0673 |
| 8 | 2,00 | 0,0547 | 0,1801 |
| 9 | 6,00 | 0,0903 | 0,2972 |
| 10 | 0,15 | 0,0248 | 0,0816 |
| 11 | 0,06 | 0,0210 | 0,0691 |
| 12 | 0,05 | 0,0205 | 0,0673 |
| 13 | 0,25 | 0,0279 | 0,0919 |
| 14 | 0,30 | 0,0293 | 0,0964 |
| 15 | 4,00 | 0,0739 | 0,2433 |
| 16 | 0,05 | 0,0205 | 0,0673 |
| 17 | 0,10 | 0,0228 | 0,0752 |
| 18 | 0,12 | 0,0237 | 0,0779 |
| 19 | 1,25 | 0,0458 | 0,1506 |
| 20 | 0,025 | 0,0190 | 0,0624 |
| 21 | 0,16 | 0,0251 | 0,0827 |
| 22 | 0,25 | 0,0279 | 0,0919 |
| 23 | 2,00 | 0,0547 | 0,1801 |
| 24 | 0,04 | 0,0199 | 0,0655 |
| 25 | 0,0015 | 0,0173 | 0,0568 |

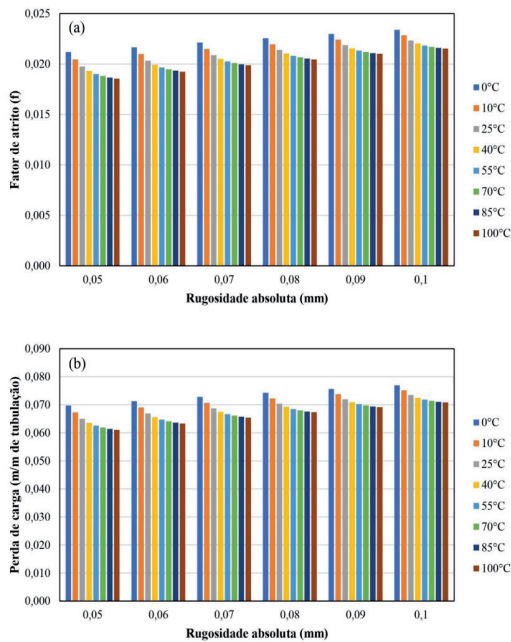
Por meio da planilha utilizada no presente estudo, após a mesma estar pronta, foi rápido e fácil estimar os valores apresentados na Tabela 2, uma vez que é só colocar os dados de entrada e o programa retorna a resposta. Além disso, é possível realizar comparações simulando diferentes condições de temperatura nas faixas de rugosidade absoluta de cada material. Por exemplo, a Figura 5 apresenta os valores de fator de atrito e perda de carga do aço soldado novo (Código 3), para a faixa de rugosidade de 0,05 mm a 0,1 mm, com

variação da temperatura entre 0 °C a 100 °C (diâmetro de 75 mm e vazão de 35 m³/h).

Observa-se que a redução de fator de atrito pela temperatura está relacionada com a redução de viscosidade e o aumento do Reynolds, que faz a equação convergir pra baixo. Da mesma forma, a perda de carga mostrou comportamento semelhante para todos os valores de rugosidade absoluta avaliados. Contudo, quando realizada a simulação para o aço soldado usado e limpo (Código 4), os resultados apresentaram um maior fator de

atrito e uma maior perda de carga (Figura 6). Essas comparações são importantes em nível industrial, uma vez que os resultados obtidos estão relacionados com os custos de operação.

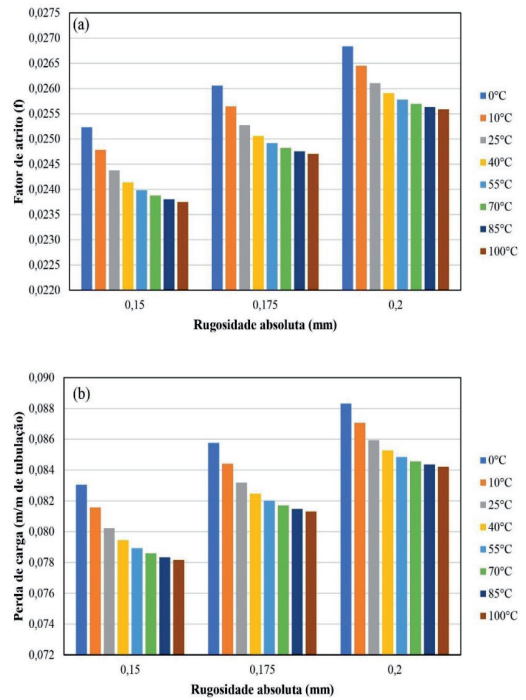
Figura 5 - Estimativa do fator de atrito (a) e perda de carga (b) para aço soldado com rugosidade de 0,05 mm a 0,1 mm, na faixa de temperatura de 0 °C a 100 °C (diâmetro de 75 mm e vazão de 35 m³/h)



É comum ocorrer perda de eficiência energética na indústria, a qual pode estar relacionada ao inadequado dimensionamento de redes de transporte de fluidos. Como consequência, é possível observar custos adicionais de produção e manutenção de equipamentos (SANTOS et al., 2016). Por isso, o estudo da Mecânica dos Fluidos é primordial no ensino de Engenharia e pode ser facilitado ao construir ferramentas computacionais como a apresentada no presente estudo, além de mostrar aos alunos situações práticas (MARTÍN et al., 2011).

Este programa de cálculo de fator de atrito pode ser utilizado como subrotina de

Figura 6 - Estimativa do fator de atrito (a) e perda de carga (b) para aço soldado usado e limpo com rugosidade de 0,15 mm a 0,2 mm, na faixa de temperatura de 0 °C a 100 °C (diâmetro de 75 mm e vazão de 35 m³/h)



balanços de energia em usinas hidrelétricas, potência de bombas para processos de escoamento de água em adutoras de água, fluidos viscosos como óleos e até mesmo para ventiladores industriais apenas com a implementação de cálculos de propriedades destes fluidos (massa específica e viscosidade dinâmica). Portanto, esta ferramenta de ensino apresenta grande flexibilidade de implementação, baixo custo de processamento e abrange grande variedade de possibilidades para que os alunos tenham não somente o cálculo de fator de atrito, mas a sua aplicação em processos e ter a possibilidade de avaliar as entradas do processo de cálculo (vazão, diâmetro, temperatura e rugosidade) com os resultados. Dessa forma, os alunos podem compreender com melhor qualidade e eficiência esta importante área do conhecimento que é a mecânica dos fluidos.

Conclusões

No presente estudo, a utilização de equações que relacionam a temperatura com as propriedades da água para avaliar o fator de atrito de um escoamento de água em uma tubulação com determinada rugosidade foi abordada. Dessa forma, foi apresentada a metodologia de avaliação de fator de atrito com a utilização do método de Newton para

a solução da Equação de Colebrook-White e os resultados obtidos para diferentes materiais foram apresentados. Os cálculos foram realizados em função da temperatura, vazão, diâmetro da tubulação e rugosidade da mesma, com a utilização de equações preditivas de propriedades da água. Os resultados alcançados propõem a utilização da planilha computacional ao invés do Diagrama de Moody, que apresenta problemas de precisão de leitura.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, L.; CARVALHO, J. DE A. Análise da equação de Swamee-Jain para cálculo do fator de atrito. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v. 5, n. 3, p. 554-557, 2001.
- ARAÚJO, R. M. L.; BARALDI, I. M.; BRIGHENTI, M. J. L.; RIBEIRO, F. R. L.; SIMEÃO, S. F. P. A planilha excel como instrumento pedagógico na formação do professor de matemática. **Zetetiké - Cempem Unicamp**, v. 13, n. 23, p. 137-160, 2005.
- AZIZI, N.; HOMAYOON, R.; HOJJATI, M. R. Predicting the colebrook-white friction factor in the pipe flow by new explicit correlations. **Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME**, v. 141, n. 5, 2019.
- CABEZA, A.; SOBRÓN, F.; GARCÍA-SERNA, J.; COCERO, M. J. Simulation of the supercritical CO₂ extraction from natural matrices in packed bed columns: User-friendly simulator tool using Excel. **Journal of Supercritical Fluids**, v. 116, p. 198-208, 2016.
- FEISE, H. J.; SCHAER, E. Mastering digitized chemical engineering. **Education for Chemical Engineers**, v. 34, p. 78-86, 2021.
- FIGUEIRA, J. S.; VEIT, E. A. Usando o Excel para medidas de intervalo de tempo no laboratório de Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 26, n. 3, p. 203-211, 2004.
- FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. . **Introdução à mecânica dos fluidos**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- MARTÍN, Á.; BERMEJO, M. D.; MATO, F. A.; COCERO, M. J. Teaching advanced equations of state in applied thermodynamics courses using open source programs. **Education for Chemical Engineers**, v. 6, n. 4, p. 114-121, 2011.
- SANTOS, T. C.; FERREIRA, P. J. G.; VIVALDINI, T. C.; LIMA, I. B.; FRUGOLI, A. D.; FRUGOLI, P. A. Desenvolvimento de equipamentos didáticos para ensino de mecânica dos fluidos: Estudo da perda de carga. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 35, n. 2, p. 14-25, 2016.
- SIMÓN-HERRERO, C.; ROMERO, A.; DORADO, F.; GRACIA, I.; VALVERDE, J. L.; SANCHEZ-SILVA, L. Taylor-made aerogels through a freeze-drying process: economic assessment. **Journal of Sol-Gel Science and Technology**, v. 89, n. 2, p. 436-447, 2019.